

Übungen zur Theoretischen Physik I, SS 2012

B. Kubis, C. Urbach, K. Ottnad, S. Schneider

Übungsblatt 11

A.17 Poissonklammern (II)

Benutzen Sie für diese Aufgabe die Ergebnisse der Hausaufgabe H.21.

- (a) Berechnen Sie die folgenden Poissonklammern mit den Drehimpulskomponenten $l_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k$:

$$\{l_i, q_j\}, \quad \{l_i, p_j\}, \quad \{l_i, l_j\}, \quad \{l_i, |\mathbf{r}|\}, \quad \{l_i, l^2\}.$$

- (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators aus den mit Hilfe der Poissonklammern geschriebenen Relationen

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\}$$

ab.

- (c) Beweisen Sie: Die aus zwei Erhaltungsgrößen f und g gebildete Poissonklammer $\{f, g\}$ ist ebenfalls eine Konstante der Bewegung, d.h.

$$f, g = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \{f, g\} = \text{const.}$$

- (d) Zeigen Sie, dass die dritte Drehimpulskomponente L_z eine Erhaltungsgröße ist, wenn L_x und L_y Erhaltungsgrößen sind.

H.23 Das Fadenpendel (8 P.)

Gegeben sei ein Fadenpendel der Länge l mit einer am Ende des Pendels befindlichen Punktmasse m .

- (a) Geben Sie die Lagrangefunktion L , die Hamiltonfunktion H sowie die totale Energie $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ des Pendels an. (2p.)
- (b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Pendels im Rahmen (i) der Newtonschen Theorie, (ii) der Lagrangeschen Theorie, (iii) der Hamiltonschen Theorie ab. (3p.)
- (c) Ist $H = E_{\text{tot}}$ und sind H bzw. E_{tot} erhalten? Warum? (2p.)
- (d) Leiten Sie zuletzt die Bewegungsgleichung auch mithilfe der Energieerhaltung ab, d.h. fordern Sie $\dot{E}_{\text{tot}} = 0$ und folgern Sie daraus die Bewegungsgleichung. (1p.)

H.24 Hamilton-Funktion (6 P.)

- (a) Man zeige: Wenn die Hamilton-Funktion H und eine Größe F Erhaltungsgrößen sind, dann ist auch $\partial F / \partial t$ eine Erhaltungsgröße. (2p.)
- (b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion eines Teilchens in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$. Das Teilchen bewege sich in einem Zentralkraftfeld, dessen Ursprung auf der Rotationsachse liegt. Zeigen Sie explizit, dass die z -Komponente des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße ist. (4p.)

H.25 Kanonische Transformationen II (6 P.)

Für welche Werte von α und β stellen die folgenden Transformationen

$$Q = p^\alpha \cos(\beta q) \quad P = p^\alpha \sin(\beta q)$$

eine kanonische Transformation dar? Welche Form hat die Erzeugende $F_2(q, P, t)$ in diesem Fall?